

Un estudio sobre la exactitud del M.E.F. Aplicación a la barra recta a extensión.

Avelino Samartín Quiroga

Catedrático de Cálculo de Estructuras de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander

## 1. INTRODUCCION

El objetivo de este artículo es fundamentalmente didáctico. Corresponde a un resumen de una monografía escrita sobre el tema [1], como report interno del Departamento de Análisis de las Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, e intenta presentar cómo varía la exactitud -o velocidad de la convergencia- en los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos (MEF). Con objeto de reducir al máximo el esfuerzo computacional se ha considerado un problema de continuidad  $C^0$ , y únicamente un elemento aislado, concretamente, el caso de una barra aislada de sección variable bajo acción axial. Este ejemplo sencillo no permite deducir conclusiones definitivas y extensibles a otros casos pero sí probablemente, obtener algunas indicaciones sobre la importancia de algunos aspectos de MEF en relación con la exactitud de los resultados.

Evidentemente la eficiencia computacional no puede ser evaluada en las características de un elemento aislado, ni incluso en constelaciones de elementos idénticos sino en configuraciones reales de mallas. En efecto, se comprende el número de parámetros que están implicados en una evaluación de este tipo. Aquí solo se citan algunos: 1) Características de las funciones de forma - (continuidad interior [2] o exterior [3], grado de funciones polinómicas, completud de los polinomios [4] etc.), tipo de elementos (topológico, dimensionalidad, geométrico, etc.), configuración de la malla, clase de resultados que se estudian, acciones, procedimientos numéricos y discretización, etc.

## 2. MATRIZ DE RIGIDEZ Y CARGAS EQUIVALENTES EXACTAS

Dentro de la teoría lineal de cálculo de estructuras la ecuación que rige el comportamiento de una barra recta de longitud  $l$ , sección variable  $A(x)$ , (figura 1) y módulo de elasticidad  $E$ , es:

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad \text{para} \quad x \in (0, l) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 \quad \delta \quad EA \frac{du}{dx} = -p_1 \quad \text{para} \quad x = 0 \\ u &= u_2 \quad \delta \quad EA \frac{du}{dx} = p_2 \quad \text{para} \quad x = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

con  $u = u(x)$  el movimiento longitudinal de la sección para la abscisa  $x$ .

Se puede expresar la matriz de rigidez  $\underline{k}$  de esta barra mediante la resolución de la ecuación (1) y las pertinentes condiciones de contorno (2), resultando para el caso de variación lineal de la sección  $A(x)$  entre los valores de los extremos  $A_1$  y  $A_2$ .

$$\underline{k} = \bar{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \quad (3)$$

siendo

$$\bar{k} = 2\mu \left\{ \log \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \right\}^{-1} \quad (4)$$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad (\text{area media}) \quad (5)$$

$$\mu = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \quad (|\mu| \leq 1) \quad (6)$$

Las cargas equivalentes a una uniformemente distribución en toda la longitud de la barra con intensidad  $q$  son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = ql \begin{bmatrix} 1 - \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (7)$$

siendo

$$\bar{p} = \frac{\mu+1}{2\mu} - \left\{ \log \frac{1+\mu}{1-\mu} \right\}^{-1} \quad (8)$$

Los valores de estos parámetros para distintos valores del coeficiente  $\mu$  se representan en la tabla 1.

### 3. ELEMENTOS SIMPLES DE DOS NUDOS CON FUNCIONES DE FORMA LINEALES A TROZOS

#### 3.1. UN TRAMO UNICO LINEAL (Figura 2)

En este caso los coeficientes de las matrices de rigidez y del vector de cargas equivalentes alcanzan los valores independientes de  $\mu$ .

$$\bar{k} = 1 \quad \text{y} \quad \bar{p} = 0.5 \quad (9)$$

#### 3.2. DOS INTERVALOS IGUALES (Figura 3a).

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 2 - 4\nu + 4\nu^2 + \mu(1 - 2\nu) \\ \bar{p} &= \frac{2\nu + 1}{4} \end{aligned} \quad (10)$$

Estos valores pueden mejorarse introduciendo la condición de que la ordenada  $v$  produzca un mínimo de  $\bar{k}$ , es decir:

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \mu$$

con lo que se deduce:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{1}{4} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{4 + \mu}{8}\end{aligned}\quad (11)$$

### 3.3. DOS INTERVALOS DESIGUALES (Figura 3b).

Resultan los parámetros del elemento:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \{2-4v+4v^2 + \mu(1-2v+2\lambda(1-2v+2v^2) + \lambda^2(1-2v))\} \frac{1}{1-\lambda^2} \\ \bar{p} &= \frac{2v + 1 - \lambda}{4}\end{aligned}$$

Considerando el valor de  $v$  que hace  $\frac{\partial k}{\partial v} = 0$  se deduce:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{(2 + \mu\lambda + \mu)(2 + \mu\lambda - \mu)}{2(1 + \mu\lambda)} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\mu(1 - \lambda^2)}{8(1 + \mu\lambda)}\end{aligned}\quad (12)$$

Se se adopta  $\lambda$  de modo que  $\frac{dk}{d\lambda} = 0$  resulta:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \mu^2}) \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{4\mu}\end{aligned}\quad (13)$$

### 3.4. N-1 INTERVALOS IGUALES (Figura 4)

Los parámetros del elemento son:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i)^2 \{1 + \mu(\frac{2i-1}{N-1} - 1)\} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} + v_i)\end{aligned}\quad (14)$$

Si se eligen los valores de  $v_i$  tales que minimicen a  $\bar{k}$ , se deducen los siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{N-1}{S} \\ \bar{p} &= \frac{1}{N-1} \{-\frac{1}{2} + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i-1) a_i\}\end{aligned}\quad (15)$$

con

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

$$a_i = \frac{1}{1 - \mu + \frac{2i-1}{N-1} \mu}$$

Particularizando para distintos valores de N las fórmulas (15) se deduce la siguiente tabla 2:

TABLA 2

| N | $\bar{k}$  | $\bar{p}$  |
|---|--|--|
| 3 | $1 - \frac{\mu^2}{4}$  | $\frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}$  |
| 4 | $1 - \frac{8\mu^2}{27 - 4\mu^2}$                               | $\frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27 - 4\mu^2}$                               |
| 5 | $1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)}$               | $\frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^2)}{32(16 - 5\mu^2)}$               |
| 6 | $1 - \frac{8\mu^2(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4}$ | $\frac{1}{2} + \frac{4\mu(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4}$ |

Se comprueba que cuando N tiende a infinito se obtienen como límite los valores exactos de los parámetros dados por las expresiones (4) y (8).

### 3.5. N-1 INTERVALOS DESIGUALES

Los parámetros del elemento son en este caso:

$$\bar{k} = \frac{N-1}{i=1} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \{2 + \mu(\lambda_i + \lambda_{i+1})\} \quad (16)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{4} \frac{N-1}{i=1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) (v_{i+1} + v_i)$$

Si se seleccionan las ordenadas de modo que minimice el parámetro  $\bar{k}$ , resultan los nuevos valores:

$$\bar{k} = \frac{1}{S} \quad (17)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{4} \frac{N-1}{i=1} \Delta\lambda_i \{ \Delta v_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} \Delta v_j \}$$

siendo

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

$$a_i = \frac{\Delta\lambda_i}{2 + \mu(\lambda_{i+1} + \lambda_i)}$$

$$\Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$$

$$\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$$

Si se eligen a su vez los intervalos  $\Delta \lambda_i$  (o valores de las abscisas  $\lambda_i$ ) con la condición de mínimo para  $\bar{k}$  se obtiene que deben de satisfacer estos la siguiente igualdad:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{N-1} \quad (18)$$

es decir:

$$\Delta \lambda_i = a^{-1} \rho (1+\rho)^{i-1} \quad (19)$$

$$\text{con } a = \frac{\mu}{1-\mu} \quad (20)$$

$$\rho = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1 \quad (21)$$

Los parámetros del elemento son en este caso:

$$\bar{k} = \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \cdot \frac{\mu}{N-1} \quad (22)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left\{ 1 - \frac{\mu}{N-1} \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \right\}$$

#### 4. ELEMENTOS SIMPLES DE DOS NUDOS CON FUNCIONES DE FORMA NO LINEALES

##### 4.1. INTRODUCCION

Se deben de utilizar polinomios completos si se desean obtener resultados convergentes o con error acotado. Se pueden extender la técnica desarrollada en el apartado 3, pero considerando ahora funciones parabolicas de segundo grado.

##### 4.2. DOS TRAMOS IGUALES (Figura 5)

Las funciones de forma consideradas son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\xi(\xi-1)}{2} - v(\xi^2-1) \\ N_2 &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} - (1-v)(\xi^2-1) \end{aligned} \quad (23)$$

que conducen a los siguientes valores de los parámetros:

$$\bar{k} = \frac{4}{3}(1-2v)(1-2v-\mu) + 1$$

$$\bar{p} = \frac{5-4\nu}{6}$$

Eligiendo  $\nu$  de modo que  $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \nu} = 0$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}\end{aligned}\tag{24}$$

#### 4.3. DOS TRAMOS DESIGUALES

Las funciones de forma constituyen una extensión de los (23), es decir:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{(\xi-1)(\xi-\lambda)}{2(1+\lambda)} + \nu \frac{\xi^2-1}{\lambda^2-1} \\ N_2 &= \frac{(\xi+1)(\xi-\lambda)}{2(1-\lambda)} + (1-\nu) \frac{\xi^2-1}{\lambda^2-1}\end{aligned}\tag{25}$$

y los correspondientes parámetros son:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{3} \frac{\lambda-1+2\nu}{\lambda^2-1} \left( \frac{\lambda-1+2\nu}{\lambda^2-1} - \mu \right) + 1 \\ \bar{p} &= \frac{3\lambda^2 + 2\lambda - 5 + 4\nu}{3(\lambda^2 - 1)}\end{aligned}\tag{26}$$

Si se elige  $\nu$  de forma que  $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \nu} = 0$  se deduce:

$$\nu = \frac{1}{4} \{ \mu \lambda^2 - 2\lambda + 2 - \mu \}$$

y los parámetros son iguales a (24).

La anterior técnica se podría extender introduciendo N-2 puntos intermedios, con abscisas equidistantes o no y ordenadas arbitrarias. De esta forma se definiría un polinomio de Lagrange y los parámetros  $\bar{k}$  y  $\bar{p}$  correspondientes. Los valores de las ordenadas y eventualmente de las abscisas (en el caso de tramos desiguales arbitrarios) se deducen mediante la condición de mínimo de  $\bar{k}$ .

Una posibilidad de familia de elementos, relacionadas con la anterior, corresponde a considerar parábolas de grado K, que pasan por K+1 puntos interiores, de modo que la función de forma sea continua, pero con derivada discontinua. De este modo se obtendrían elementos parabólicos en varios tramos, análogamente a como se comentó en el apartado 3 anterior.

### 5. ELEMENTOS CON TRES GRADOS DE LIBERTAD

#### 5.1. INTRODUCCION

Si se designa con el subíndice "a" al grado de libertad adicional a los movimientos y fuerzas en los nudos extremos del

elemento, se obtiene la matriz de rigidez y cargas equivalentes del elemento simple con 2 gdl mediante condensación estática, es decir, la matriz de rigidez del elemento total es:

$$\begin{bmatrix} \underline{p} \\ \underline{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{oo} & \underline{k}_{oa} \\ \underline{k}_{ao} & \underline{k}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d} \\ \underline{d}_a \end{bmatrix}$$

se deduce la matriz de rigidez condensada  $\underline{k}$  mediante la expresión:

$$\underline{p}^* = \underline{k} \underline{d}^* \quad \text{con} \quad \underline{k} = \underline{k}_{oo} - \underline{k}_{oa} \underline{k}_{aa}^{-1} \underline{k}_{ao}$$

y análogamente para el vector de cargas

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} \underline{p}_0 \\ \underline{p}_a \end{bmatrix} \quad \text{resulta} \quad \underline{p}^* = \underline{p}_0 - \underline{k}_{oa} \underline{k}_{aa}^{-1} \underline{p}_a$$

## 5.2. ELEMENTO CON DOS NUDOS. HIPERELEMENTO (Figura 6)

Por condensación se deducen los parámetros del elemento:

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{3} \mu^2$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}$$

que coinciden con la fórmula (24).

## 5.3. ELEMENTOS CON TRES NUDOS (Figuras 7 y 8)

Los parámetros del elemento resultan tras la condensación independientes de la posición del nudo intermedio (central o no) y del grado de libertad existente (esencial ó derivado-desplazamiento, giro, curvatura), es decir, vienen expresados por las fórmulas (24).

## 6. ELEMENTOS CON N GRADOS DE LIBERTAD

Las ideas del apartado 5 anterior pueden extenderse al caso de N grados de libertad ( $N \geq 3$ ) y utilizar la técnica de la condensación estática para deducir los parámetros del elemento simple.

Se contemplan tres grandes grupos de estos elementos:

- (A) Con dos nudos o hiperelementos. (B) Con K nudos ( $2 < K < N$ ) y
- (C) Con N nudos o elementos simples lagrangianos.

Es posible obtener una formulación general de los parámetros para estos casos, sin embargo, a efectos ilustrativos sólo se muestran los correspondientes a la situación de  $N = 4$ .

El hiperelemento de dos nudos (figura 9), de tres nudos (figura 10) y elemento de cuatro nudos (figura 11) conducen a los mismos valores de los parámetros (tras la condensación estática):

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15-4\mu^2)}\end{aligned}\quad (27)$$

## 7. ELEMENTOS COMPUESTOS

Se puede considerar un elemento simple constituido por varios subelementos. La técnica de cálculo sería de composición de las matrices y vectores de los subelementos y su condensación estática posterior.

Si el elemento está compuesto por subelementos simples iguales de parámetros:

$$\bar{k}_n(\mu) \quad \text{y} \quad \bar{p}_n(\mu)$$

se puede mostrar la siguiente fórmula:

$$\bar{k}_{n+1}(\mu) = \frac{1}{\frac{1}{(2-\mu)\bar{k}_n(\frac{\mu}{2-\mu})} + \frac{1}{(2+\mu)\bar{k}_n(\frac{\mu}{2+\mu})}} \quad (28)$$

Por otra parte existe la siguiente relación entre los parámetros:

$$\bar{p}_n(\mu) = \frac{1}{2} - \frac{1 - \bar{k}_n(\mu)}{2\mu} \quad (29)$$

Por ejemplo si se consideran dos elementos simples se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{1}{4} \mu^2 \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}\end{aligned}\quad (29)$$

Si dos de estos elementos (iguales) se componen en uno nuevo, se obtiene por aplicación reiterada de la expresión (28) y (29):

$$\begin{aligned}\bar{k} &= 1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^4)}{32(16 - 5\mu^2)}\end{aligned}\quad (31)$$

Si se utilizan dos elementos simples correspondientes a una condensación de tres nudos, es decir:



$$\bar{k}_0 = 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \quad \text{y} \quad \bar{p}_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \mu$$

se deduce:

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= 1 - \frac{\mu^2(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^2)} \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\mu(12 - \mu^2)}{24(3 - \mu^2)} \end{aligned} \quad (32)$$

Como último ejemplo si se consideran dos elementos simples procedentes de la condensación de hiper-elementos de dos nudos - (4 gdl), es decir, con los parámetros

$$\bar{k}_0 = 1 - \frac{5\mu^2}{15-4\mu^2} \quad \text{y} \quad \bar{p}_0 = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}$$

resulta:

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= 1 - \frac{\mu^2(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4} \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\mu(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4} \end{aligned} \quad (33)$$

El proceso anterior de composición de subelementos se puede desarrollar sin necesidad de utilizar subelementos simples ó hiper-elementos condensados. La formulación general es de interés y se complica. Por ejemplo, el elemento compuesto de dos hiper-elementos de 3 gdl y 2 nudos (figura 12), conduce a los valores de los parámetros:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= 1 - \frac{4\mu^2}{3(4-\mu^2)} \\ \bar{p} &= \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{6(4-\mu^2)} \end{aligned} \quad (34)$$

## 8. ELEMENTOS ESPECIALES

Existen otras técnicas de generación de matrices de rigidez y cargas equivalentes de elementos finitos que no pueden ser incluidas en los apartados anteriores. Una de ellas, de gran importancia computacional corresponde a los procedimientos de integración reducida y selectiva. En particular en el proceso de condensación estática no es preciso, para alcanzar idénticos resultados a los exactos, evaluar las integrales con el orden de integración exacto (número de puntos de Gauss). La importancia de este tema y su extensión en el ejemplo de la barra recta impide su exposición detallada. Se dará aquí en las conclusiones algunos resultados obtenidos de la experimentación llevada a cabo.

9. CONCLUSIONES

En los apartados anteriores se ha planteado el problema de la velocidad de convergencia del método de los elementos finitos en sus términos mas generales, indicando algunos de los numerosos parámetros de los que depende.

Con objeto de evitar la complicación algebraica del método de los elementos finitos, que aparece en el tratamiento de problemas de dimensión y continuidad elevadas, se ha considerado en este estudio el caso mas simple de la columna recta (problema 1-D con continuidad  $C^0$ ). Para este caso, solo se han estudiado los parámetros característicos del elemento que pueden influir en la velocidad de convergencia del cálculo, llevando a cabo un estudio numérico que intenta cubrir exhaustivamente las posibilidades actuales. Sin embargo no se ha realizado ningún intento de resolver importantes problemas anejos, estrechamente relacionados con el aquí tratado, en especial:

a) Sistematización y nomenclatura de los distintos elementos. b) Generación automática de funciones de forma y matrices de rigidez y cargas equivalentes en familias de elementos c) Optimización de mallas. Asimismo no se han considerado otros parámetros del elemento -matriz de resultados, matriz de masas consistentes, etc.- que pueden ser decisivos en la exactitud final de los resultados de un cálculo.

Con estas limitaciones, y de la observación de los valores numéricos de los parámetros de distintos elementos y su comparación con la solución exacta, se puede concluir:

- 1) En la exactitud de los resultados, es importante elegir funciones de deformación (matriz  $B$  que relaciona deformaciones-movimientos) que permitan simular el mayor número de estados de deformación arbitrarios. A este respecto, los criterios de deformación nula y constantes, necesarios para la convergencia podrían ser ampliados muy fácilmente, con relación a la velocidad de convergencia en la siguiente dirección: Definida una base de funciones ortogonal sobre el elemento, el máximo número de las primeras funciones de esta base susceptibles de ser anuladas con mínimo de error podría ser un índice de la velocidad de convergencia.
- 2) Con referencia a la conclusión anterior, funciones de deformación discontinuas, constituidas por polinomios a trozos, pueden ser más eficientes que funciones polinómicas de varios ordenes superior. Esta eficiencia crece al dejar, si es posible, arbitrarias la posición de los distintos puntos de discontinuidad, es decir, de cambio de expresión polinómica.
- 3) La importancia de las funciones de forma queda relegada a estos efectos a cumplir los requerimientos de continuidad mínima. Sin embargo, en la comparación entre

elementos conformes, la importancia estriba en el grado de las funciones de deformación o, en general, en la posibilidad de simular cualquier estado de deformación. Los ejemplos de elementos con funciones de forma parabólicas (apartado 6.3), distintas conducían tras la condensación, a idénticos resultados de la matriz de rigidez y cargas equivalentes.

- 4) Con relación a elementos compuestos, si los subelementos son simples, se deducen valores de  $\bar{k}$  y  $\bar{p}$  mas exactos si bien esta mejoría es extraordinariamente mas lenta en comparación con la obtenida con subelementos mas adecuados (simples obtenidos por condensación) o directamente hiperelementos de tres nudos. Comparense a estos efectos los resultados del apartado 7. Es decir, la complicación del cálculo (número de subelementos) no significa necesariamente un mejor refinamiento en los resultados.
- 5) La importancia del procedimiento de integración numérica no debe de ser disminuida. Existe evidentemente un número teórico de puntos de integración que conduce a resultados exactos en  $\bar{k}$  y  $\bar{p}$ , y que, por lo tanto, es ineficiente utilizar un número mayor. Mas aun con un número de puntos inferior al teórico es posible obtener (a partir de matrices aproximadas del elemento total) mediante condensación valores exactos de los parámetros  $\bar{k}$  y  $\bar{p}$ .
- 6) -En el curso de este estudio, se han obtenido varias fórmulas de caracter general, entre las que cabe destacar:
  - Expresión de las funciones de forma en hiperelementos de K puntos y orden N.
  - Obtención mediante recurrencia de las expresiones de las características de rigidez  $\bar{k}$  y carga  $\bar{p}$  a partir de N subelementos.
  - Matrices de rigidez y cargas de elementos simples con funciones de formas lineales a trozos. Caso general de trozos iguales y desiguales. Asimismo en conexión con este problema, disposición de los nudos intermedios de modo que la matriz de rigidez sea óptima.

Estos resultados representan un paso de la dirección de la generación automática de elementos finitos, objetivo imprescindible para la evaluación de la exactitud de diferentes mallas.

El estudio aquí presentado, puede servir de pauta para llevar a cabo una experimentación numérica en otros problemas mas complejos. En especial, una etapa inmediata, aparte de la consideración de otros tipos de variación de la sección de la columna, corresponde al análisis de los elementos de flexión monodimensio

nales (1-D orden  $C^1$ ), en donde la simulación de funciones de forma discontinuas del tipo de las usadas en (5) presenta un interés especial. La extensión a los elementos triangulares y rectangulares  $C^0$  -existen algunas familias ya estudiadas actualmente- y  $C^1$ , donde resultados generales son escasos, es el siguiente desafío que el analista en el método de los elementos finitos debe aceptar.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) SAMARTIN, A. "Un estudio sobre la exactitud del método de los elementos finitos. Aplicación a la barra recta de sección variable bajo esfuerzos axiales". Departamento de Análisis de las Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander (1980).
- (2) B.M. IRONS y K.J. DRAPER. "Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending. Journ. Am. Inst. Aeron. Astron. Vol. 3. Mayo (1965).
- (3) R.W. CLOUGH y C.A. FELIPPA. "A refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending". Proc. 2° Conf. Matrix Methods in Struc. Mech. Air Force Inst of Techn. Wright - Patterson. Ohio (1968).
- (4) R.L. TAYLOR. "On completeness of shape functions for finite element analysis". Int. Journ. Num. Meth. Eng. 4. (1972).

Tabla 1.

Solución exacta. (Figura 1)

$$\bar{k} = 2\nu(\log(\frac{1+\nu}{1-\nu}))^{-1} \quad \bar{p} = \frac{1+\nu}{2\nu}(\log(\frac{1+\nu}{1-\nu}))^{-1}$$

|           |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\nu$     | 0.00  | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50  | 0.60  | 0.70  | 0.80  | 0.90  | 0.99  |
| $\bar{k}$ | 1.000 | 0.997 | 0.987 | 0.969 | 0.944 | 0.910 | 0.866 | 0.807 | 0.728 | 0.611 | 0.374 |
| $\bar{p}$ | 0.500 | 0.517 | 0.534 | 0.551 | 0.570 | 0.590 | 0.612 | 0.638 | 0.670 | 0.716 | 0.816 |

Tabla 3.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Tramo único. (Figura 2)

$$\bar{k} = 1.000 \quad \bar{p} = 0.500$$

Errores absolutos  $\Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}$ ;  $\Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$

|                 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\nu$           | 0.00  | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50  | 0.60  | 0.70  | 0.80  | 0.90  | 0.99  |
| $\bar{k}$       | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 | 0.500 |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.003 | 0.013 | 0.031 | 0.056 | 0.090 | 0.134 | 0.193 | 0.272 | 0.389 | 0.626 |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | 0.017 | 0.034 | 0.051 | 0.070 | 0.090 | 0.112 | 0.138 | 0.170 | 0.216 | 0.316 |

Tabla 4.

Elemento simple con funciones de forma lineales. Dos tramos iguales (Figura 3a).

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{4}\nu^2 \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{8}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}}; \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

|                 |       |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\nu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.998  | 0.990  | 0.978  | 0.960  | 0.938  | 0.910  | 0.878  | 0.840  | 0.798  | 0.755  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.513  | 0.525  | 0.538  | 0.550  | 0.563  | 0.575  | 0.588  | 0.600  | 0.613  | 0.625  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.001  | 0.003  | 0.009  | 0.016  | 0.028  | 0.044  | 0.071  | 0.110  | 0.187  | 0.381  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.004 | -0.009 | -0.013 | -0.020 | -0.027 | -0.037 | -0.050 | -0.070 | -0.103 | -0.291 |

Tabla 5.

Elemento simple con funciones de forma lineales. Dos tramos distintos. (Figura 3b).

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \nu^2}) \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{(1 - \sqrt{1 - \nu^2})}{4\nu}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

|                 |       |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\nu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.990  | 0.977  | 0.958  | 0.933  | 0.900  | 0.857  | 0.800  | 0.718  | 0.571  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.513  | 0.525  | 0.538  | 0.552  | 0.567  | 0.583  | 0.602  | 0.625  | 0.657  | 0.717  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.003  | 0.008  | 0.014  | 0.023  | 0.034  | 0.050  | 0.072  | 0.107  | 0.197  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.004 | -0.009 | -0.013 | -0.018 | -0.023 | -0.029 | -0.036 | -0.045 | -0.059 | -0.099 |

Tabla 6.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Tres tramos iguales. (Figura 4).

$$\bar{k} = 1 - \frac{8\nu^2}{27 - 4\nu^2} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\nu}{27 - 4\nu^2}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

|                 |       |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\nu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.988  | 0.973  | 0.951  | 0.923  | 0.887  | 0.843  | 0.791  | 0.727  | 0.660  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.515  | 0.530  | 0.545  | 0.561  | 0.577  | 0.594  | 0.612  | 0.631  | 0.652  | 0.672  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.001  | 0.004  | 0.007  | 0.013  | 0.021  | 0.036  | 0.063  | 0.116  | 0.286  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.002 | -0.004 | -0.006 | -0.009 | -0.013 | -0.018 | -0.026 | -0.039 | -0.064 | -0.144 |

Tabla 7.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Cuatro tramos iguales. (Figura 4).

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^2)}{32(16 - 5\mu^2)}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.987  | 0.971  | 0.948  | 0.918  | 0.878  | 0.829  | 0.768  | 0.692  | 0.607  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.516  | 0.532  | 0.547  | 0.562  | 0.577  | 0.591  | 0.605  | 0.618  | 0.630  | 0.640  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.000  | 0.002  | 0.004  | 0.008  | 0.012  | 0.022  | 0.040  | 0.081  | 0.233  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.004 | -0.008 | -0.013 | -0.021 | -0.033 | -0.052 | -0.086 | -0.176 |

Tabla 8.

Elemento simple con funciones de forma lineal. Cinco tramos iguales. (Figura 4).

$$\bar{k} = 1 - \frac{8\mu^2(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu(125 - 32\mu^2)}{3125 - 1500\mu^2 + 64\mu^4}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.987  | 0.971  | 0.947  | 0.915  | 0.874  | 0.822  | 0.756  | 0.671  | 0.572  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.516  | 0.532  | 0.547  | 0.566  | 0.585  | 0.605  | 0.627  | 0.653  | 0.683  | 0.716  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.000  | 0.002  | 0.003  | 0.005  | 0.008  | 0.015  | 0.028  | 0.060  | 0.198  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.003 | -0.004 | -0.005 | -0.007 | -0.011 | -0.017 | -0.033 | -0.100 |

Tabla 9.

Caso de tres intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \cdot \frac{\mu}{N-1}}{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} - 1} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \frac{\mu}{N-1} \cdot \frac{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} - 1} \right) \quad (N = 4)$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.988  | 0.973  | 0.950  | 0.920  | 0.881  | 0.829  | 0.760  | 0.660  | 0.466  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.515  | 0.530  | 0.546  | 0.562  | 0.580  | 0.599  | 0.622  | 0.650  | 0.689  | 0.769  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.001  | 0.004  | 0.006  | 0.010  | 0.015  | 0.022  | 0.032  | 0.049  | 0.092  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.002 | -0.004 | -0.005 | -0.008 | -0.010 | -0.013 | -0.016 | -0.020 | -0.027 | -0.047 |

Tabla 10.

Caso de cuatro intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \cdot \frac{\mu}{N-1}}{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} - 1} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \frac{\mu}{N-1} \cdot \frac{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1}}{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} - 1} \right) \quad (N = 5)$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.987  | 0.971  | 0.948  | 0.916  | 0.874  | 0.820  | 0.746  | 0.639  | 0.427  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.516  | 0.532  | 0.548  | 0.565  | 0.584  | 0.605  | 0.629  | 0.658  | 0.701  | 0.789  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.000  | 0.002  | 0.004  | 0.006  | 0.008  | 0.013  | 0.018  | 0.028  | 0.053  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.003 | -0.005 | -0.006 | -0.007 | -0.009 | -0.012 | -0.015 | -0.027 |

Tabla 11.

Caso de cinco intervalos desiguales.

$$\bar{k} = \frac{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \cdot \frac{\mu}{N-1}}{\frac{(1+\mu)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{(1-\mu)^{\frac{1}{N-1}} - 1} - 1} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27 - 4\mu^2} \quad (N = 6)$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta\bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$           | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|-----------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$       | 1.000 | 0.997  | 0.987  | 0.970  | 0.946  | 0.914  | 0.871  | 0.815  | 0.740  | 0.629  | 0.408  |
| $\bar{p}$       | 0.500 | 0.516  | 0.532  | 0.549  | 0.567  | 0.586  | 0.607  | 0.632  | 0.663  | 0.706  | 0.799  |
| $\Delta\bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.000  | 0.001  | 0.002  | 0.004  | 0.005  | 0.008  | 0.012  | 0.018  | 0.034  |
| $\Delta\bar{p}$ | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.002 | -0.003 | -0.004 | -0.005 | -0.006 | -0.007 | -0.010 | -0.017 |

Tabla 12.

Elemento simple con funciones de forma parabolica. Tramo unico. (Figura 5)

$$\bar{k} = 1 - \frac{1}{3} \mu^2 \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{6}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta \bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$            | 0.00  | 0.10  | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$        | 1.000 | 0.997 | 0.987  | 0.970  | 0.947  | 0.917  | 0.880  | 0.837  | 0.787  | 0.730  | 0.673  |
| $\bar{p}$        | 0.500 | 0.517 | 0.533  | 0.550  | 0.567  | 0.583  | 0.600  | 0.617  | 0.633  | 0.650  | 0.665  |
| $\Delta \bar{k}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000  | 0.001  | 0.003  | 0.007  | 0.014  | 0.030  | 0.059  | 0.119  | 0.299  |
| $\Delta \bar{p}$ | 0.000 | 0.000 | -0.001 | -0.001 | -0.003 | -0.007 | -0.012 | -0.021 | -0.037 | -0.066 | -0.151 |

Tabla 13.

Elemento simple obtenido por condensación del hiperelemento  $C^1$ . (Figuras 9, 10 y 11)

$$\bar{k} = 1 - \frac{5\mu^2}{15 - 4\mu^2} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{5\mu}{2(15 - 4\mu^2)}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta \bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$            | 0.00  | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$        | 1.000 | 0.997 | 0.987 | 0.969 | 0.944 | 0.911  | 0.867  | 0.812  | 0.743  | 0.656  | 0.558  |
| $\bar{p}$        | 0.500 | 0.517 | 0.534 | 0.551 | 0.570 | 0.589  | 0.611  | 0.634  | 0.661  | 0.691  | 0.723  |
| $\Delta \bar{k}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001  | 0.001  | 0.005  | 0.015  | 0.045  | 0.184  |
| $\Delta \bar{p}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -0.001 | -0.001 | -0.004 | -0.009 | -0.025 | -0.093 |

Tabla 14.

(Dos elementos compuestos de dos simples).

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(80 - 9\mu^2)}{16(16 - 5\mu^2)} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(80 - 9\mu^2)}{32(16 - 5\mu^2)}$$

$$\text{Errores absolutos } \Delta \bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$            | 0.00  | 0.10   | 0.20   | 0.30   | 0.40   | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$        | 1.000 | 0.997  | 0.987  | 0.971  | 0.948  | 0.918  | 0.878  | 0.829  | 0.768  | 0.692  | 0.607  |
| $\bar{p}$        | 0.500 | 0.516  | 0.532  | 0.547  | 0.562  | 0.577  | 0.591  | 0.605  | 0.618  | 0.630  | 0.640  |
| $\Delta \bar{k}$ | 0.000 | 0.000  | 0.000  | 0.002  | 0.004  | 0.008  | 0.012  | 0.022  | 0.040  | 0.081  | 0.233  |
| $\Delta \bar{p}$ | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.004 | -0.008 | -0.013 | -0.021 | -0.033 | -0.052 | -0.086 | -0.176 |

Tabla 15.

Elemento compuesto de dos hiperelementos condensados

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(400 - 180\mu^2 + 3\mu^4)}{2(1200 - 860\mu^2 + 72\mu^4)}$$

$$\text{Errores absolutos: } \Delta \bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$            | 0.00  | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50  | 0.60  | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$        | 1.000 | 0.997 | 0.987 | 0.969 | 0.944 | 0.910 | 0.866 | 0.808  | 0.730  | 0.623  | 0.479  |
| $\bar{p}$        | 0.500 | 0.517 | 0.534 | 0.551 | 0.570 | 0.590 | 0.612 | 0.637  | 0.668  | 0.709  | 0.763  |
| $\Delta \bar{k}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001  | 0.002  | 0.012  | 0.105  |
| $\Delta \bar{p}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.007 | -0.053 |

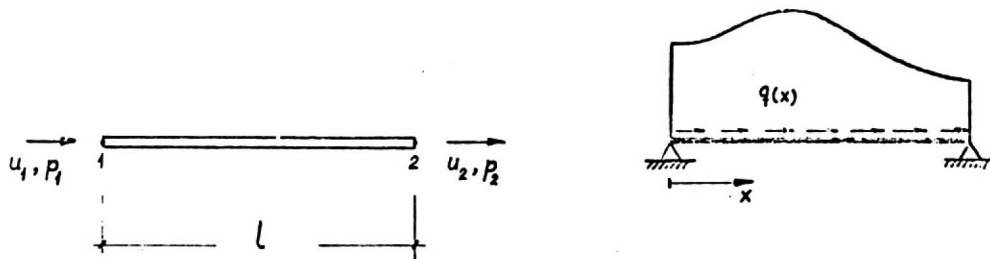
Tabla 16.

Elemento compuesto de dos subelementos de tres nudos condensados.

$$\bar{k} = 1 - \frac{\mu^2(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^2)} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(12 - \mu^2)}{12(3 - \mu^2)}$$

$$\text{Errores absolutos: } \Delta \bar{k} = \bar{k} - \bar{k}_{\text{exacto}} \quad \Delta \bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_{\text{exacto}}$$

| $\mu$            | 0.00  | 0.10  | 0.20  | 0.30  | 0.40  | 0.50   | 0.60   | 0.70   | 0.80   | 0.90   | 0.99   |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{k}$        | 1.000 | 0.997 | 0.987 | 0.969 | 0.944 | 0.911  | 0.868  | 0.813  | 0.743  | 0.655  | 0.554  |
| $\bar{p}$        | 0.500 | 0.517 | 0.534 | 0.551 | 0.570 | 0.589  | 0.610  | 0.634  | 0.660  | 0.692  | 0.725  |
| $\Delta \bar{k}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001  | 0.002  | 0.006  | 0.015  | 0.044  | 0.180  |
| $\Delta \bar{p}$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -0.001 | -0.002 | -0.004 | -0.010 | -0.024 | -0.091 |



(a) Matriz de rigidez

(b) Solución inicial

Figura 1. Barra recta a extensión

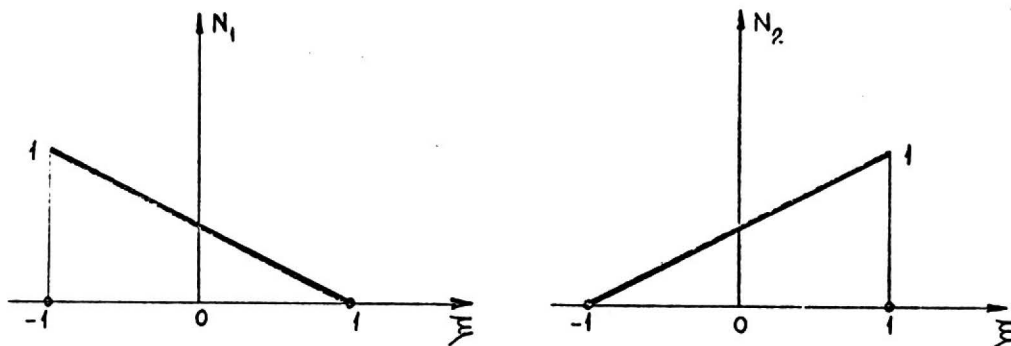


Figura 2. Funciones de forma del elemento lineal: 1 tramo

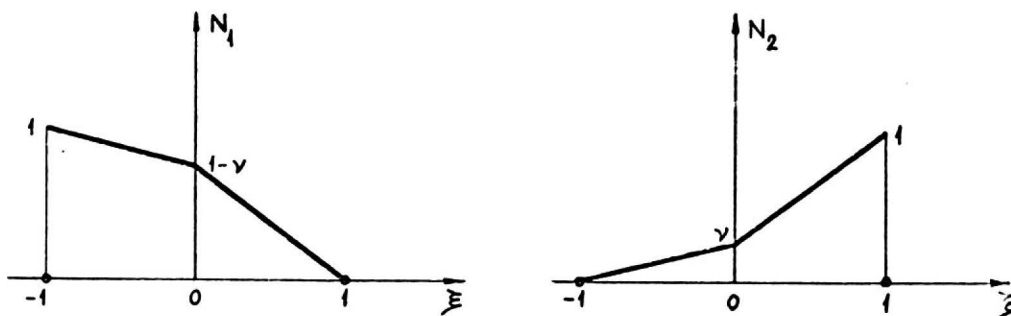


Figura 3a. Funciones de forma del elemento lineal: 2 tramos iguales



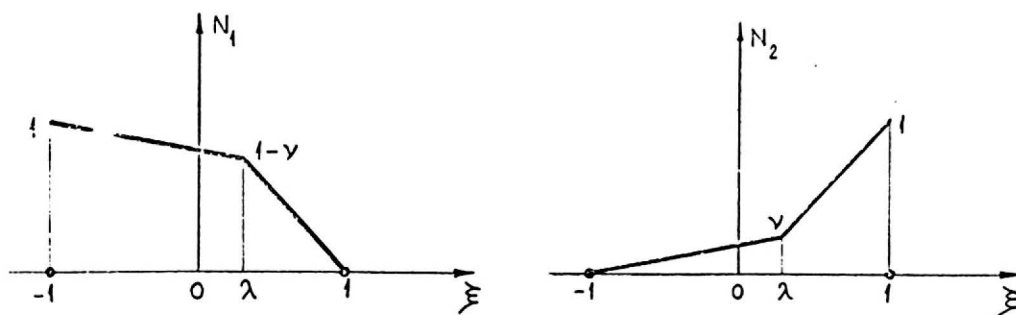


Figura 3b. Funciones de forma del elemento lineal: 2 tramos desiguales

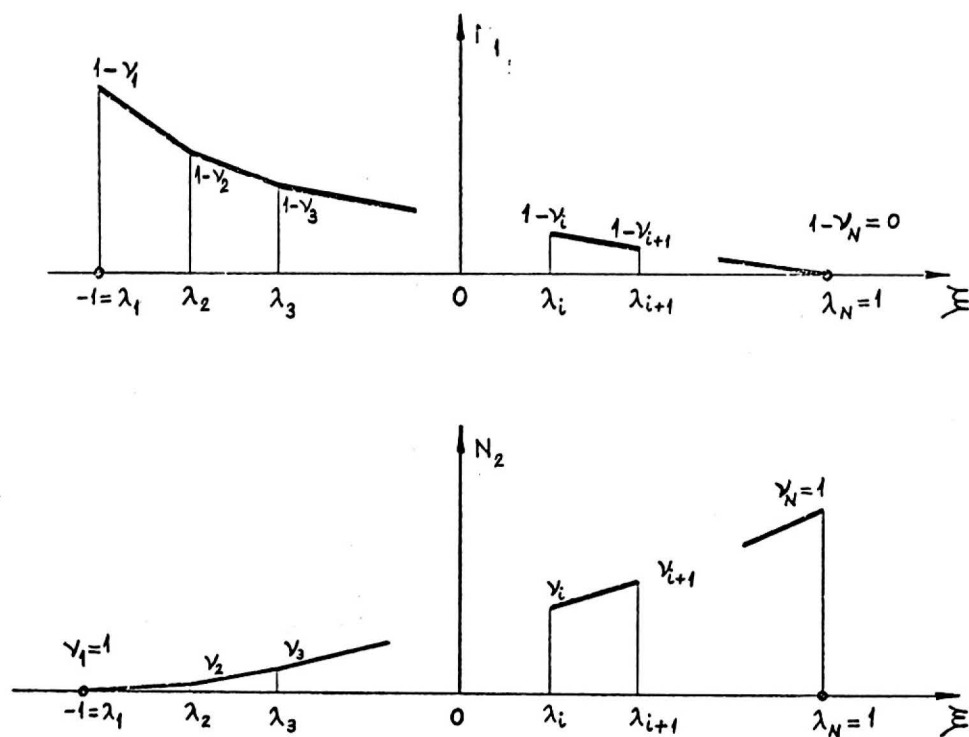


Figura 4. Funciones de forma del elemento lineal.  $N$ -tramos

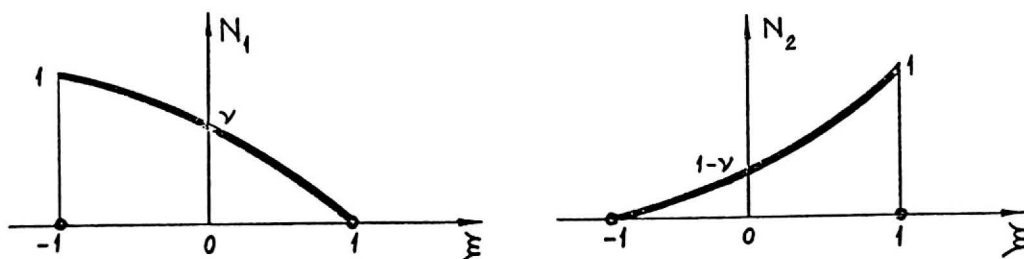


Figura 5. Función parabólica. Un tramo único.

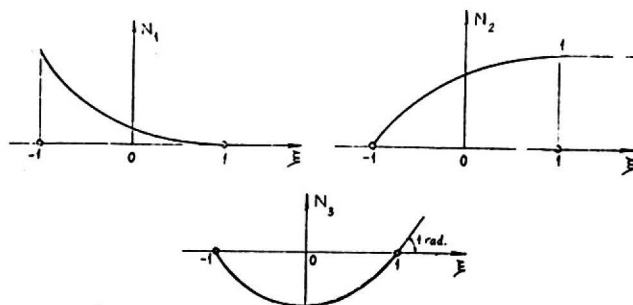


Figura 6. Funciones de forma del elemento con grados de movimiento  $(u_1, u_2, u_{2,x})$ . Hiper elemento.

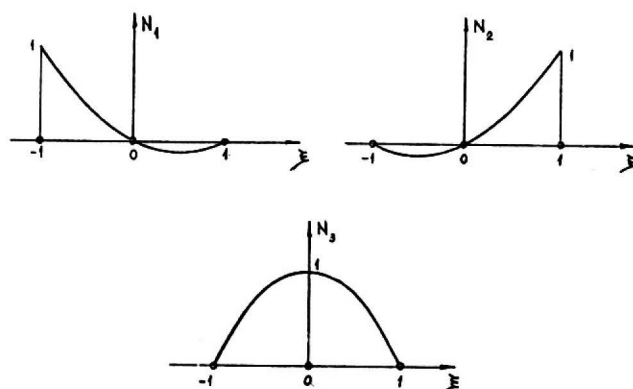


Figura 7. Funciones de forma del elemento con tres nudos.

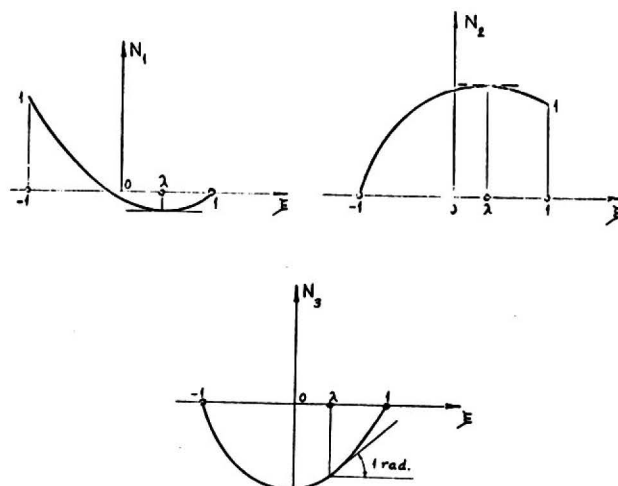


Figura 8. Funciones de forma del elemento con dos nudos y 1 gdl interior no esencial.

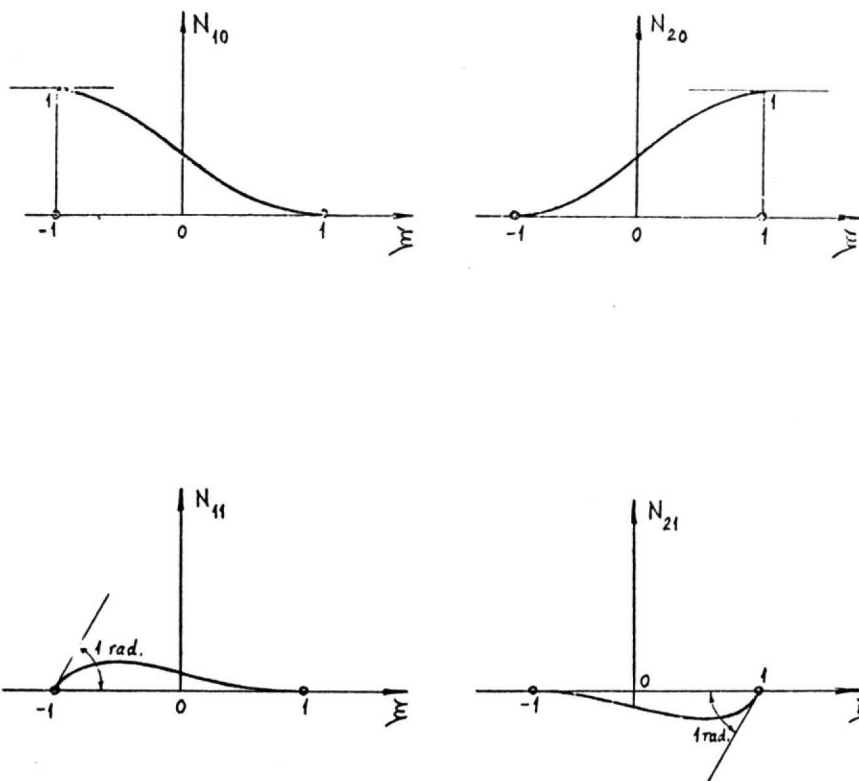


Figura 9. Hiper elemento de dos nudos ( $C'$ ).

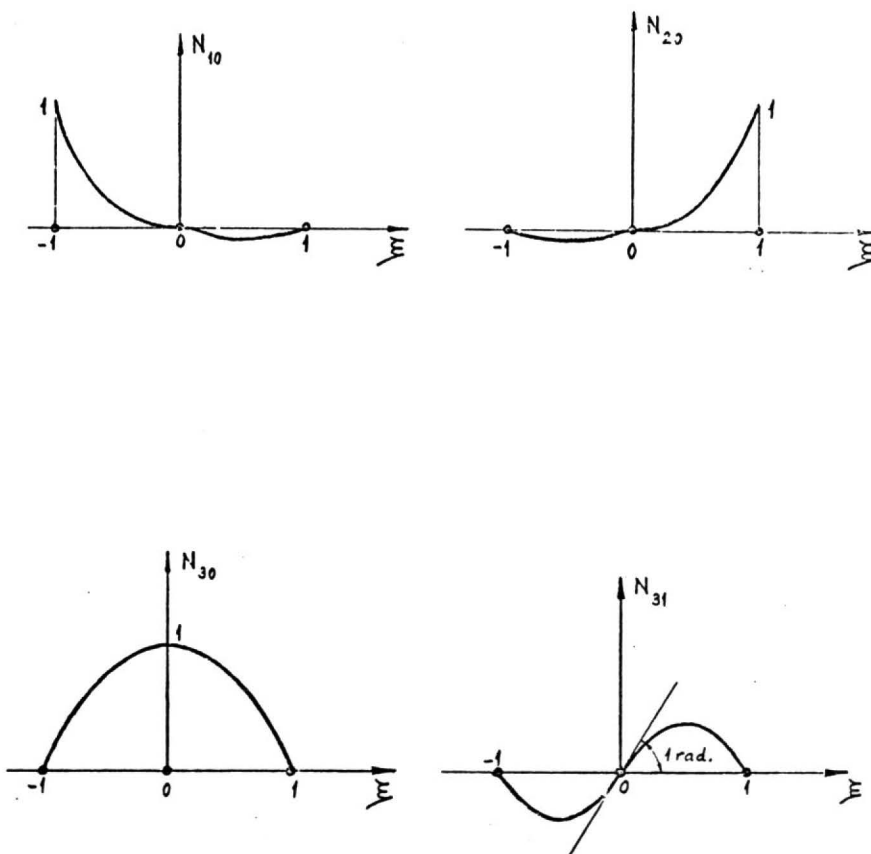


Figura 10. Hiper elemento con tres nudos.

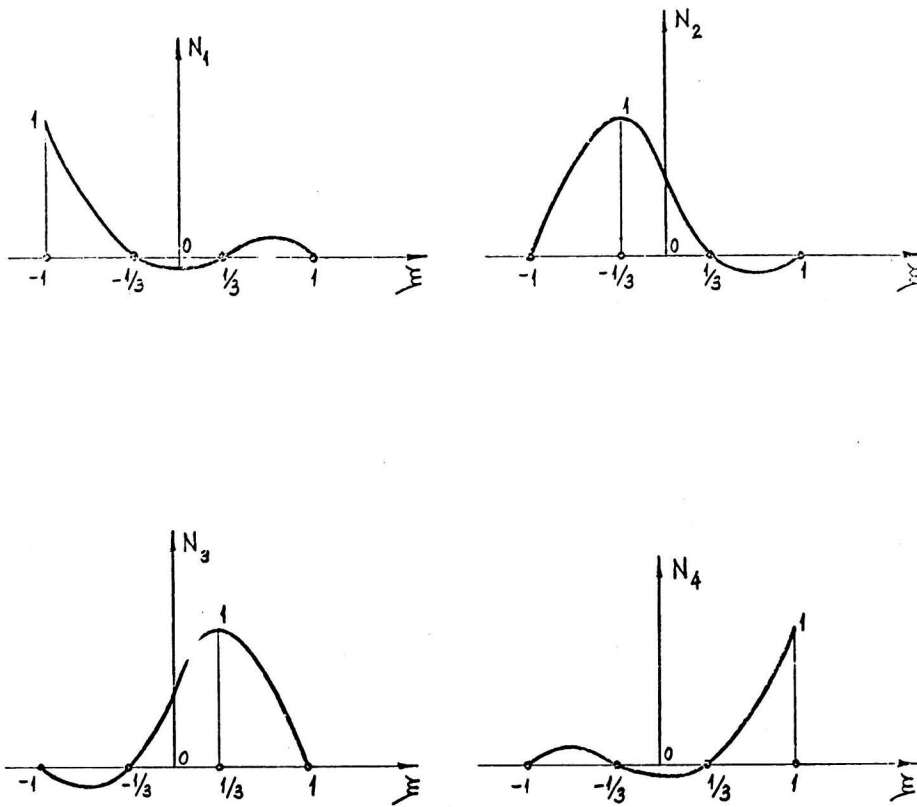


Figura 11. Elemento con cuatro nudos.

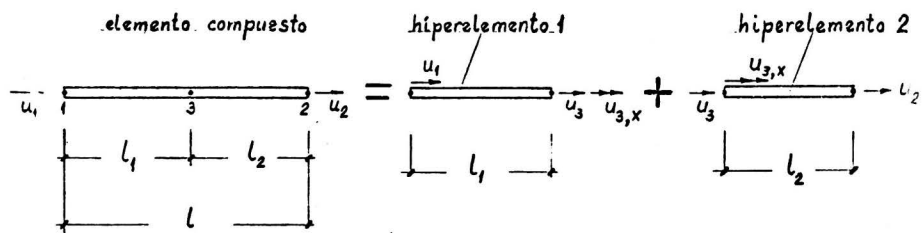


Figura 12. Elemento compuesto de hiperelementos.